8. cvičení - teorie

Definice. Funkce F je *primitivní funkce* na otevřeném neprázdném intervalu I k funkci f, pokud $F' = f$ na celém I. Značíme $\int f \stackrel{c}{=} F$, respektive $\int f(x)\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x)$.

Poznámka. Je-li F primitivní funkce k f a $c \in R$, pak i $F + c$ je primitivní funkce k f. Navíc platí, že primitivní funkce jsou jednoznačné až na aditivní konstantu - tj. všechny primitivní funkce k určité funkci f se od sebe navzájem liší leda o přičtenou konstantu.

Věta (linearita integrálu)**.** Nechť f, g jsou spojité funkce a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int af(x) + bg(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x + b\int g(x)\mathrm{d}x.$$

Věta (per partes)**.** Nechť I je neprázdny otvorený interval a funkcia f je spojitá na I. Nech F je primitívna funkcia k f na I a G je primitívna funkcia ku g. Potom platí:

$$\int g(x)F(x)\ \mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Věta (substituce)**.** Buď F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) a φ diferencovatelná funkce na (α, β). Je-li $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$, pak platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) \text{ pro } x \in (\alpha, \beta).$$